# Aula 17

## Elementos da teoria da teoria espectral nos espaços de Hilbert

## Operador adjunto

Sejam $H_1$ e $H_2$ esp. de Hilbert e
$T : D(T) \subseteq H_1 \to H_2$, $\overline{D(T)} = H_1$.

Lembrete: (T. de Riesz)

Seja $f \in H_1^*$ (dual) $\Rightarrow \exists! z \in H_1$ tal que
$f(x) = \langle x, f \rangle = (x, z)_1$, $\forall x \in H_1$ e $\|f\| = \|z\|_1$

O operador adjunto $T'$ no sentido de Hilbert

**Def 1** O operador adjunto $T'$ no sentido de Hilbert é definido por: $T' : D(T') \subseteq H_2 \to H_1$

$D(T') = \{ y \in H_2 : \exists z_y \in H_1$ tal que $(Tx, y)_2 = (x, z_y)_1 \}$

$T'y = z_y$.

**Observação** 1) $y \in D(T') \iff f_y(x) = (Tx, y)_2 : D(T) \to \mathbb{C}$
for contínuo. (isto é $\exists C_y > 0$ tal que
$|(Tx, y)_2| \leq C_y \|x\|_1$, $\forall x \in D(T)$)

2) Como $\overline{D(T)} = H_1 \Rightarrow z_y \in H_1$ tal que
$(Tx, y)_2 = (x, z_y)_1$ $\forall x \in D(T)$ é único (para cada x)
(ou seja, $T'$ é bem-definido)

De fato, tem-se $f_y(x) = (Tx, y)_2$, $D(f_y) = D(T)$
Consideremos a extensão $\tilde{f}_y$ do $f_y$ ao todo $H_1$
tal que $\tilde{f}_y(x) = f_y(x)$. Como $\overline{D(f_y)} = \overline{D(T)} = H_1$
$\Rightarrow \tilde{f}_y$ é única.

②

Como $\tilde{f}_y \in H_1^*$, pelo T. de Riesz, $\exists !\, z_y \in H_1$ tal que $\tilde{f}_y(x) = (x, z_y)_1 \Rightarrow f_y(x) = \tilde{f}_y(x) = (x, z_y)_1 = (Tx, y)_2, \ \forall x \in D(T)$.

3) Se T fore limitado $\Rightarrow D(T') = H_2$.

$T: D(T) \subseteq H \to H$ e $\overline{D(T)} = H \Rightarrow$

**Def 2** Seja

1) T é dito <u>simétrico</u> se $T \subseteq T'$, ou seja

$D(T) \subseteq D(T')$ e $Tx = T'x, \ \forall x \in D(T)$

$(\Leftrightarrow \forall x, y \in D(T), \ (Tx, y) = (x, Ty)\ )$

2) T é dito <u>auto-adjunto</u> se $T = T'$.

**Ex 1** Sejam $H = L^2[a,b]$ e $\alpha(x) \in C[a,b]$.

Consideremos $(M_\alpha f)(x) = \alpha(x) f(x)$,

$D(M_\alpha) = \{ f \in L^2[a,b] : (\alpha \cdot f) \in L^2[a,b] \}$ ← domínio maximal.

Observe que $C[a,b] \subseteq D(M_\alpha)$ e $\overline{C[a,b]} = L^2[a,b]$

$\Rightarrow \overline{D(M_\alpha)} = H \Rightarrow M_\alpha'$ é bem-definido.

Mostremos que $M_\alpha' = M_{\bar{\alpha}}$

<u>Demonstração</u> $(M_\alpha f, g) = \int_a^b (\alpha f) \cdot \bar{g}\, dx = \int_a^b f \cdot \overline{\bar{\alpha} g}\, dx = (f, M_{\bar{\alpha}} g)$ para $f, g \in D(M_\alpha) = D(M_{\bar{\alpha}}) \Rightarrow$

$M_{\bar{\alpha}} \subseteq M_\alpha'$.

Basta provar que $M_\alpha' \subseteq M_{\bar{\alpha}}$. Sejam $g \in D(M_\alpha')$ e $h = M_\alpha' g$. Para $f \in D(M_\alpha)$ temos:

$(M_\alpha f, g) = (\alpha f, g) = (f, M_\alpha' g) = (f, h) \Rightarrow$

$\int_a^b (\alpha \cdot f) \bar{g}\, dx = \int_a^b f \cdot \bar{h}\, dx \Rightarrow \int_a^b f \cdot (\alpha \bar{g} - \bar{h})\, dx = 0$

Como $\overline{D(M_\alpha)} = L^2[a,b] \Rightarrow \alpha \cdot \bar{g} - \bar{h} = 0$ em $L^2[a,b]$

$\Rightarrow \bar{\alpha} g = h \in L^2[a,b] \Rightarrow g \in D(M_{\bar\alpha})$ e $h = M_\alpha' g = M_{\bar\alpha} g$

**Corolário** Se $\alpha = \bar\alpha \Rightarrow M_\alpha = M_\alpha'$.

Ex 2 Seja $\mathcal{H} = L^2(a,b)$, $D(T) = \{ f \in \mathcal{H}^1(a,b) : f(a) = f(b) = 0 \}$

$(Tf)(x) = -i f'(x)$, onde

$\mathcal{H}^1(a,b) = \{ f : f$ é absolutamente cont. em $[a,b]$ e $f' \in L^2(a,b) \}$

Mostremos que 1) $T \subseteq T'$

2) $T' g = -i g'$ e $D(T') = \mathcal{H}^1(a,b)$

Demonstração Observe que $\overline{D(T)} = L^2(a,b)$ como $\overline{C_c^\infty(a,b)} = L^2(a,b)$ e $D(T) \supset C_c^\infty(a,b)$.

1) Sejam $f, g \in D(T) \Rightarrow$

$(Tf, g) = \int_a^b -i f' \cdot \bar{g}\, dx = -i f \cdot \bar{g} \Big|_a^b - \int_a^b (-i) f \cdot \bar{g}'\, dx = \int_a^b f \cdot \overline{(-i) g'}\, dx$

$= (f, Tg) \Rightarrow T \subseteq T'$

2) Usaremos Lema 1 $R(T)^\perp \subseteq \operatorname{span}\{1\}$

Demonstração Basta provar que $\operatorname{span}\{1\}^\perp \subseteq R(T)$

(Já que $A^\perp \subseteq B \Rightarrow B^\perp \subseteq A^{\perp\perp} = A$ para $A = \bar{A}$).

Seja $h(x) \in \operatorname{span}\{1\}^\perp$ e $k(x) = \int_a^x h(t)\,dt \Rightarrow$

$k'(x) = h(x)$ q.t.p. em $(a,b)$.

Observe que $h(x) \in L^2(a,b)$ implica $k(x) \in \mathcal{H}^1(a,b)$.

É óbvio que $k(a) = 0$ e $k(b) = \int_a^b h(t)\,dt = (h, 1) = 0$

desde que $h \perp 1 \Rightarrow k(x) \in D(T) \Rightarrow i k(x) \in D(T)$.

Assim, $T(ik) = -i(ik)' = h \Rightarrow h \in R(T) \Rightarrow$

$\operatorname{span}\{1\}^\perp \subseteq R(T)$. $\blacksquare$

4

- Agora mostraremos que $D(T') \subseteq H^1(a,b)$ e $T'g = -ig'$. Sejam $g \in D(T')$ e $T'g = \hat{g} \in L^2(a,b)$.

Definimos $k(x) = \int_a^x \hat{g}(t)dt \in H^1(a,b) \Rightarrow$
$\hat{g}(x) = k'(x)$ q.t.p. em $(a,b)$.

Seja $f \in D(T) \Rightarrow (Tf,g) = (f, T'g) = (f,\hat{g})$ ou seja $\int_a^b -if'\cdot\bar{g}\,dx = \int_a^b f\cdot\bar{\hat{g}}\,dx = \int_a^b f\cdot\bar{k}'dx = \underbrace{f\cdot\bar{k}\Big|_a^b}_{=0} - \int_a^b f'\cdot\bar{k}\,dx \Rightarrow \int_a^b f'(\bar{k} - i\bar{g})dx = 0$.

Como $f' \in R(T) \Rightarrow \bar{k} - i\bar{g} \in R(T)^{\perp} \subseteq \text{span}\{1\} \Rightarrow$
$\bar{k} - i\bar{g} = \text{const} \Rightarrow g = \overline{i(\text{const} - \bar{k})} \in H^1(a,b) \Rightarrow$
$D(T') \subseteq H^1(a,b)$. Além disso, $\bar{k}' = i\bar{g}' \Rightarrow k' = -ig' = \hat{g} = T'g$

- Falta mostrar que $H^1(a,b) \subseteq D(T')$

Sejam $g \in H^1(a,b)$, $f \in D(T) \Rightarrow$
$(Tf,g) = \int_a^b -if'\bar{g}\,dx = \underbrace{-if\bar{g}\Big|_a^b}_{=0} - \int_a^b (-i)f\cdot\bar{g}'dx = \int_a^b f\cdot\overline{\underbrace{(-ig')}_{\hat{g}\in L^2(a,b)}}\,dx$

$\Rightarrow g \in D(T') \Rightarrow H^1(a,b) \subseteq D(T')$.

**Proposição 1** Seja $T: D(T) \subseteq \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ com $\overline{D(T)} = \mathcal{H}_1$
$\Rightarrow$ 1) $T^*$ é fechado
2) $\overline{R(T)}^{\perp} = N(T')$
3) Se $D(T') = \mathcal{H}_2 \Rightarrow T \subseteq T''$
4) Seja $S: D(S) \subseteq \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$. Se $T \subseteq S \Rightarrow S' \subseteq T'$
5) $(\lambda T)' = \bar{\lambda}T'$ (observe que $(\lambda T)^* = \lambda T^*$!)
6) Se $S \in B(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2) \Rightarrow (T+S)' = T' + S'$

Demonstração 1) Segue como no caso $T^*$.

2) Suponha que $y \in N(T')$ ou seja $(T'y, x)_1 = 0$, $\forall x \in D(T)$

(deve usar $D(T) = \mathcal{H}_1$).

Temos: $0 = (T'y, x)_1 = (y, \overset{\in R(T)}{Tx})_2$, $\forall x \in D(T) \Leftrightarrow$

$y \in R(T)^\perp \Rightarrow R(T)^\perp = N(T')$.

3)–6) facilmente seguem da definição.

**Proposição 2** Seja $T : D(T) \subseteq \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ fechado com $\overline{D(T)} = \mathcal{H}_1 \Rightarrow$

1) $\overline{D(T')} = \mathcal{H}_2$ e $T = T''$

2) Se $N(T) = \{0\}$ e $\overline{R(T)} = \overline{D(T^{-1})} = \mathcal{H}_2 \Rightarrow \exists (T')^{-1}$ e $(T')^{-1} = (T^{-1})'$.

Veja demonstração na p. 11 do livro de Schmüdgen

**Corolário** Seja $T : D(T) \subseteq \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ fechado com $\overline{D(T)} = \mathcal{H}_1 \Rightarrow N(T') = R(T)^\perp$ e $N(T'') = R(T')^\perp$ ou $N(T) = R(T')^\perp$. Portanto

$\mathcal{H}_2 = N(T') \oplus \overline{R(T)}$ e $\mathcal{H}_1 = N(T) \oplus \overline{R(T')}$

Em particular, se $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}$ e $\lambda \in \mathbb{C} \Rightarrow$

$$\mathcal{H} = N(\bar{\lambda} - T') \oplus \overline{R(\lambda - T)} = N(\lambda - T) \oplus \overline{R(\bar{\lambda} - T')}$$

## Pontos do tipo regular

Seja $T : D(T) \subseteq \mathcal{H} \to \mathcal{H}$.

**Def 2** $\lambda \in \mathbb{C}$ é dito um ponto do tipo regular do $T$ se $(\lambda - T)^{-1}$ for limitado em $R(\lambda - T)$ (ou seja $\|(\lambda - T)^{-1} f\| \le C \|f\|$, $\forall f \in R(\lambda - T)$)

$\hat{\rho}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda$ é do tipo regular $\}$

**Observação** 1) $\rho(T) \subseteq \hat{\rho}(T)$

2) $\lambda \in \hat{\rho}(T)$ sse $\exists\, C_\lambda > 0$ tal que $\|(\lambda - T)y\| \geq C_\lambda \|y\|$, $\forall y \in D(T)$ (1)

Demonstração $\Leftarrow$ De (1) segue

$N(\lambda - T) = \{0\} \Rightarrow (\lambda - T)^{-1}$ existe. Seja $(\lambda - T)y = \underset{R(\lambda-T)}{\underset{\cap}{f}}$

$\Rightarrow y = (\lambda - T)^{-1} f \underset{(1)}{\Rightarrow} \|(\lambda - T)^{-1} f\| \leq \frac{1}{C_\lambda} \|f\|$

$\Rightarrow (\lambda - T)^{-1}$ é limitado em $R(\lambda - T)$.

$\Rightarrow$ Segue facilmente com $C_\lambda = \frac{1}{\|(\lambda - T)^{-1}\|}$.

Corolário $\hat{\rho}(T) = \mathbb{C} \setminus \mathrm{Gap}(T)$ (mostre!)

**Proposição 5** $\hat{\rho}(T)$ é aberto em $\mathbb{C}$. Em particular, se $\lambda_0 \in \hat{\rho}(T)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ satisfizer $|\lambda - \lambda_0| < C_{\lambda_0} \Rightarrow$ $\lambda \in \hat{\rho}(T)$.

Demonstração Temos: $\lambda_0 \in \hat{\rho}(T)$, $|\lambda - \lambda_0| < C_{\lambda_0}$ e $\|(\lambda_0 - T)y\| \geq C_{\lambda_0} \|y\|$, $y \in D(T) \Rightarrow$

$\|(\lambda - T)y\| = \|(\lambda_0 - T)y - (\lambda_0 - \lambda)y\| \geq \|(\lambda_0 - T)y\| - |\lambda - \lambda_0| \|y\|$

$\geq \underbrace{(C_{\lambda_0} - |\lambda - \lambda_0|)}_{C_\lambda} \|y\| \Rightarrow \|(\lambda - T)y\| \geq C_\lambda \|y\| \Rightarrow$

$\lambda \in \hat{\rho}(T) \Rightarrow \hat{\rho}(T)$ é aberto.

**Observação** Se $T$ é fechado e $\lambda \in \hat{\rho}(T) \Rightarrow$ $R(\lambda - T)$ é fechado (isso segue facilmente de (1)).

**Def 3** A imagem numérica do $T$ está definida por: $\Theta(T) = \{(Tf, f) : f \in D(T), \|f\| = 1\}$.

**Lema 1** Se $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\overline{\Theta(T)} \Rightarrow \lambda \in \hat{\rho}(T)$.

**Demonstração** Seja $d_\lambda = \text{dist}(\lambda, \overline{\Theta(T)})$ e $y \in D(T)$ com $\|y\|=1 \Rightarrow \|(\lambda-T)y\| = \|(\lambda-T)y\|\cdot\|y\| \geq$

$\underset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\geq} |((\lambda-T)y,y)| = |(Ty,y)-\lambda| \geq d_\lambda \Rightarrow$

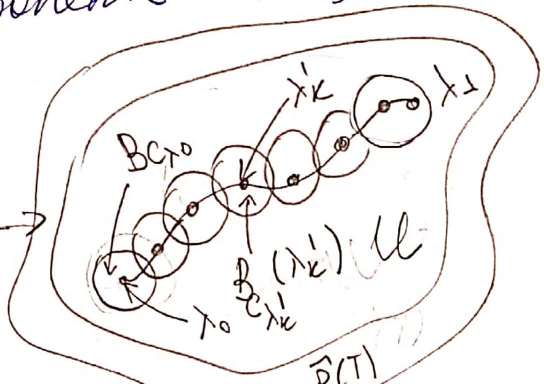
$\|(\lambda-T)y\| \geq d_\lambda \|y\|, \forall y \in D(T) \Rightarrow \lambda \in \hat{\rho}(T)$.

**Def 4** Seja $\lambda \in \hat{\rho}(T) \Rightarrow$ o subespaço $R(\lambda-T)^\perp$ é dito um subespaço de deficiência e $d_\lambda(T) = \dim R(\lambda-T)^\perp$ é dito índice de deficiência.

**Observação** Se $\overline{D(T)} = \mathcal{H} \Rightarrow R(\lambda-T)^\perp = N(\bar{\lambda}-T') \Rightarrow$

$d_\lambda(T) = \dim N(\bar{\lambda}-T')$.

**Teorema 1** (Krasnosel'skii e Krein)
Suponha que $T: D(T) \subseteq \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ é fechado $\Rightarrow$ $d_\lambda(T)$ é constante em cada componente $\mathcal{U} \subseteq \hat{\rho}(T)$ conexa por caminhos.




**Demonstração** Seja $\lambda_0 \in \hat{\rho}(T)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|\lambda-\lambda_0| < c_{\lambda_0}$ $\Rightarrow \lambda \in \hat{\rho}(T)$. Basta provar que $d_\lambda(T) = d_{\lambda_0}(T)$. Observe que $R(\lambda-T)$ e $R(\lambda_0-T)$ são subespaços fechados.

Assume que $\underbrace{d_\lambda(T)}_{\dim R(\lambda-T)^\perp} < \underbrace{d_{\lambda_0}(T)}_{\dim R(\lambda_0-T)^\perp} \Rightarrow \exists\, y \neq 0 \in R(\lambda_0-T)^\perp$

tal que $y \in (R(\lambda-T)^\perp)^\perp = R(\lambda-T)$
como $R(\lambda-T)$ é fechado

Usamos o fato: Se F e G são subesp. fechados de $\mathcal{H}$

tais que $\dim F < \dim G \Rightarrow \exists y \neq 0 \in G \cap F^{\perp}$.
(veja Lema 2.3 no livro de Schmüdgen)
Neste caso particular $F = R(\lambda - T)^{\perp}$, $G = R(\lambda_0 - T)^{\perp}$

Agora, como $y \in R(\lambda - T) \Rightarrow y = (\lambda - T)x$, $x \in D(T)$.
Lembre que $y = (\lambda - T)x \in R(\lambda_0 - T)^{\perp} \Rightarrow$

$$((\lambda - T)x, (\lambda_0 - T)x) = 0$$ (← é simétrico em $\lambda$ e $\lambda_0$ ⇒ pode assumir também que $d_{\lambda_0}(T) < d_{\lambda}(T)$)

Agora, $\|(\lambda_0 - T)x\|^2 =$
$= ((\lambda - T)x + (\lambda_0 - \lambda)x, (\lambda_0 - T)x) = ((\lambda_0 - \lambda)x, (\lambda_0 - T)x) \leq$
$\leq |\lambda_0 - \lambda| \|x\| \|(\lambda_0 - T)x\| \Rightarrow \|(\lambda_0 - T)x\| \leq |\lambda_0 - \lambda| \|x\|$.

Como $x \neq 0$ e $|\lambda_0 - \lambda| < c_{\lambda_0} \Rightarrow$

$$|\lambda_0 - \lambda| \|x\| < c_{\lambda_0} \|x\| \leq \|(\lambda_0 - T)x\| \leq |\lambda_0 - \lambda| \|x\| \Rightarrow$$
$|\lambda_0 - \lambda| < |\lambda_0 - \lambda|$ (contradição) $\Rightarrow d_{\lambda}(T) = d_{\lambda_0}(T)$.

Suponha que $\lambda_1 \in U$ e $\lambda_1 \neq \lambda_0 \Rightarrow$ existe um caminho $\gamma$ conectando $\lambda_1$ e $\lambda_0$ e $\gamma \subset U$ e tal que $\gamma \subset \bigcup_{k=1}^{n} B_{c_{\lambda'_k}}(\lambda'_k)$, $\lambda'_k \in \gamma$. Como $d_{\lambda}(T) = d_{\lambda_0}(T)$ em cada bola $B_{c_{\lambda'_k}}(\lambda'_k)$, obtemos o resultado.

**Lema 2** Seja $T : D(T) \subseteq \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ fechado $\Rightarrow$

1) $\rho(T) = \{\lambda \in \tilde{\rho}(T) : d_{\lambda}(T) = 0\}$

2) Se $\overline{D(T)} = \mathcal{H} \Rightarrow \lambda \in \sigma(T)$ sse $\bar{\lambda} \in \sigma(T')$ e $R_{\lambda}(T)' = R_{\bar{\lambda}}(T')$. (compare com adjunto de Banach $T^*$)

**Demonstração** 1) • Seja $\lambda \in \rho(T) \Rightarrow R(\lambda - T) = \mathcal{H}$
Temos $\mathcal{H} = R(\lambda - T) \oplus R(\lambda - T)^{\perp} \Rightarrow R(\lambda - T)^{\perp} = \{0\}$
← observe que isso é fechado

$\Rightarrow d_\lambda(T) = 0 = \dim R(\lambda - T)^\perp$

• Seja $\lambda \in \hat{\rho}(T)$ tal que $d_\lambda(T) = 0 \Rightarrow H = R(\lambda - T) \Rightarrow$
$D((\lambda-T)^{-1}) = H$ e $\|(\lambda - T)y\| \geq C_\lambda \|y\| \ \forall y \in D(T) \Rightarrow$
$\|(\lambda-T)^{-1} f\| \leq \frac{1}{C_\lambda}\|f\| \ \forall f \in R(\lambda - T) = H \Rightarrow$
$(\lambda - T)^{-1} \in B(H) \Rightarrow \lambda \in \rho(T)$.

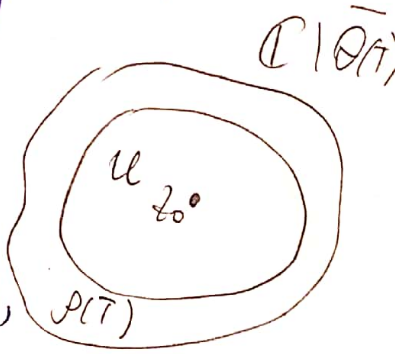
2) Vamos provar que $\lambda \in \rho(T)$ sse $\bar{\lambda} \in \rho(T')$
Lembre que, pela Prop 2, $N(T) = \{0\}$ e $\overline{R(T)} = H \Rightarrow$
$\exists (T')^{-1}$ e $(T')^{-1} = (T^{-1})'$.

• Seja $\lambda \in \rho(T) \Rightarrow R(\lambda - T) = H$ e $N(\lambda - T) = \{0\} \Rightarrow$
$\exists (\bar{\lambda} - T')^{-1} = ((\lambda - T)^{-1})'$. Como $(\lambda - T)^{-1} \in B(H) \Rightarrow$
$((\lambda - T)^{-1})' \in B(H) \Rightarrow (\bar{\lambda} - T')^{-1} \in B(H) \Rightarrow \bar{\lambda} \in \rho(T')$.

• Substituindo $T$ por $T'$ e $\lambda$ por $\bar{\lambda}$ e usando
$\lambda - T = \lambda - T''$, obtemos $\bar{\lambda} \in \rho(T') \Rightarrow \lambda \in \rho(T)$.

Finalmente $\lambda \in \rho(T) \Leftrightarrow \bar{\lambda} \in \rho(T')$.

**Lema 3** Sejam $T: D(T) \subseteq H \to H$ fechado e
$U \subseteq \mathbb{C} \setminus \overline{\Theta(T)}$ aberto e conexo por caminhos.
Se $\exists \lambda_0 \in U \cap \rho(T)$ (se $U \cap \rho(T) \neq \emptyset$) $\Rightarrow U \subseteq \rho(T)$.
Além disso, $\|(\lambda - T)^{-1}\| \leq (\mathrm{dist}(\lambda, \Theta(T)))^{-1} \ \forall \lambda \in U$.




Demonstração: Do Lema 1 segue
$U \subseteq \hat{\rho}(T)$. Pelo Teorema 1,
$d_\lambda(T) = \text{const}$ em $U$. Como $\lambda_0 \in U \cap \rho(T)$,
por Lema 2, $d_{\lambda_0}(T) = 0 \Rightarrow d_\lambda(T) = 0 \ \forall \lambda \in U \Rightarrow$

$\Rightarrow$ por Lema 2 $U \subseteq \rho(T)$.

Seja $d_\lambda = \text{dist}(\lambda, \Theta(T))$, $\lambda \in U \Rightarrow \forall x \in D(T)$ com $\|x\| = 1$ tem-se: $\|(\lambda - T)x\| \underset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\geq} |((\lambda - T)x, x)| = |\lambda - (Tx, x)| \geq d_\lambda$

$\Rightarrow \|(\lambda - T)y\| \geq d_\lambda \|y\| \quad \forall y \in D(T) \Rightarrow \|(\lambda - T)^{-1} h\| \leq \frac{1}{d_\lambda} \|h\|$

$\Rightarrow \|(\lambda - T)^{-1}\| \leq \frac{1}{d_\lambda}$

Observações 1) Do Lema 3 segue que $\sigma(T) \subseteq \mathbb{C} \setminus U \Rightarrow$ obtemos localização do espectro.

2) Existe generalização do Lema 3 para o espaço de Banach $E$. Seja $A : D(A) \subseteq E \to E \Rightarrow$ a imagem numérica $\Theta(A)$ é:

$$\Theta(A) = \left\{ \langle Ax, x^* \rangle_{E \times E^*} : x \in D(A), \|x\| = 1, x^* \in E^*, \|x^*\| = 1, \langle x, x^* \rangle = 1 \right\}$$

Lema 4 Seja $A : D(A) \subseteq E \to E$ fechado com $\overline{D(A)} = E$.

Se $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{\Theta(A)} \Rightarrow N(\lambda - A) = \{0\}$ e $R(\lambda - A) = \overline{R(\lambda - A)}$.

Suponha que $U \subseteq \mathbb{C} \setminus \overline{\Theta(A)}$ aberto e conexo e

Se $\rho(A) \cap U \neq \emptyset \Rightarrow U \subseteq \rho(A)$.

$\|(\lambda - A)^{-1}\| \leq (\text{dist}(\lambda, \Theta(A)))^{-1}, \lambda \in U$.